PTOLOMEY TEOREMASINING BA'ZI BIR ISBOTLARI VA UNING TADBIQLARI HAQIDA.

To'xtayev Javohir Otabek o'g'li

Suyarova Gulsora Anvar qizi

JDPU, Matematika va informatika fakulteti, 3-bosqich talabalari

Annotatsiya: Ushbu maqolada geometriya kursida Ptolomey teoremasining isbotlari, uni qo'llash usullari va unga doir misollarni ko'ramiz. Aynan ushbu kursda teoremani o'qitishning dolzarbligi keltirilgan.

Kalit so'zlar: Teorema, Ptolomey teoremasi, geometriya, to'rtburchak, aylana.

Ptolomey teoremasi – geometriyada to'rtburchaklar va aylana bilan bog'liq bo'lgan muhim bir teorema bo'lib, u aylana ichida joylashgan to'rtburchaklar uchun diagonallar va tomonlar o'rtasidagi bog'liqlikni aniqlaydi. Bu teorema qadimgi yunon matematikasi va astronomiysi sohasida katta ahamiyatga ega bo'lib, uning nomi Aleksandriyalik Ptolomeyga (milodiy 2-asr) berilgan.

Ptolomey teoremasi geometriyada va matematikada bir nechta muhim jihatlarni yoritadi:

1. Aylana ichidagi to'rtburchaklar uchun umumiy formula: Bu teorema aylana ichida joylashgan barcha to'rtburchaklar uchun ishlatiladigan umumiy bir formuladir.
2. Ko'plab geometrik masalalarda qo'llaniladi: Masalan, aylanaga o'rnatilgan to'rtburchaklar bilan bog'liq bo'lgan masalalarni yechishda, ya'ni, chiziqlar va qirrali shakllarning o'zaro bog'liqliklarini topishda ishlatiladi.
3. Astronomiya va kinematika: Ptolomey teoremasi astronomiyada, ayniqsa, sayyoralar harakati bilan bog'liq masalalarda qo'llanilgan. Ptolomey, o'zining "Almagest" asarida bu teoremani astronomik hisob-kitoblarni soddalashtirishda ishlatgan.

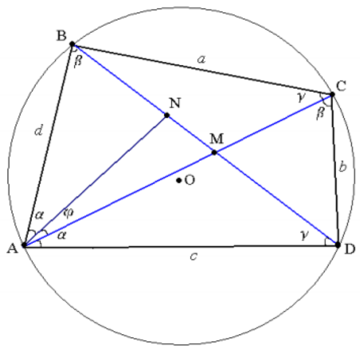
Ptolomey teoremasi miloddan avvalgi 2-asrda Aleksandriyalik Ptolomey tomonidan keltirilgan. Ptolomey, asosan, astronomiya bilan shug'ullangan, lekin uning geometriya bo'yicha ishlari ham juda muhim. U "Almagest" asarida, yulduzlar va sayyoralar harakatlarini hisoblash uchun Ptolomey teoremasini qo'llagan. Teorema geometriya sohasida ham, astronomiya va kosmologiya sohalarida ham ahamiyatga ega bo'ldi.

Ptolomey Teoremasi**.** Ixtiyoriy qavariq to’rtburchakka tashqi aylana chizilgan bo’lsa, u holda uning diagonallarining ko’paytmasi qarama-qarshi tomonlari ko’paytmasi yig’indisiga tengligini isbotlang, ya’ni:

$$d_1 * d_2 = d * b + a * c$$

1-isboti. Burchak yasab isbotlaymiz.

$\angle CAD$ ga teng bo‟lgan $\angle BAC$ ichidan $\angle BAN$ yasaymiz. Chizmaga qarab quyidagilarni yozamiz:



$$\Delta ANB \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{BN}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ADN \Rightarrow \frac{ND}{BC} = \frac{AD}{AC}$$

Bu tengliklardan:

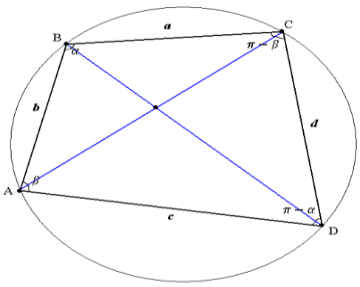
$$\begin{cases} BN = \dfrac{AB}{AC} \cdot DC = \dfrac{bd}{d_1} \\ ND = \dfrac{AD}{AC} \cdot BC = \dfrac{ac}{d_1} \end{cases}$$

Bu tengliklarni hadma-had qo’shib, $BN + ND = d_2$ ekanligidan

$$BN + ND = \frac{1}{d_1}(b \cdot d + a \cdot c) \Rightarrow d_1 \cdot d_2 = b \cdot d + a \cdot c$$

tenglikni hosil qilamiz.

2-isboti. Kosinuslar teoremasidan foydalanib isbotlaymiz.



Bizga ma'lumki, qavariq to'rtburchakka tashqi aylana chizilgan bo'lsa, uning qarama-qarshi burchaklarining yig‘indisi 180° ga teng bo‘ladi, ya'ni

$$\begin{cases} \angle ABC=\alpha \Rightarrow \angle ADC=\pi-\alpha \\ \angle BAD=\beta \Rightarrow \angle BCD=\pi-\beta \end{cases}$$

tengliklarni yozishimiz mumkin. Chizmadagi belgilashlarga asosan ΔABC va ΔADC larda kosinuslar teoremasini qo'llaymiz:

$$\begin{cases} {d_1}^2 = d^2 + c^2 - 2dc\cos\alpha \\ {d_1}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi-\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{d^2+c^2-{d_1}^2}{2dc} \\ \cos(\pi-\alpha) = \frac{{d_1}^2-a^2-b^2}{2ab} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2+c^2-{d_1}^2}{2dc} = \frac{{d_1}^2-a^2-b^2}{2ab} \Rightarrow ab(d^2+c^2-{d_1}^2) = dc({d_1}^2-a^2-b^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab(d^2+c^2) - ab{d_1}^2 = dc{d_1}^2 - dc(a^2+b^2) \Rightarrow$$

$${d_1}^2 = \frac{abd^2+abc^2+dca^2+dcb^2}{dc+ab} \Rightarrow {d_1}^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{dc+ab}$$

Xuddi shunga o'xshash ΔABD va ΔBDC larda kosinuslar teoremasini qo'llab

$${d_2}^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{dc+ab}$$

ekanligini topamiz. Topilgan ${d_1}^2$ va ${d_2}^2$ qiymatlarini hadma-had ko'paytirib

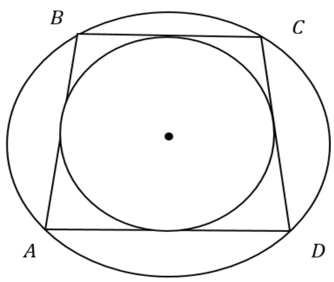
$${d_1}^2\,{d_2}^2 = (ac+bd)^2 \Rightarrow d_1 d_2 = ac+bd$$

tenglikni hosil qilamiz.

Yuqoridagi isbotlarga doir misollarni ko'raylik:

1-misol. Tomonlari uzunliklari 2, 3, 4 va 5 bo'lgan to'rtburchakka ichki va tashqi aylanalar chizish mumkin. To'rtburchakning diagonallar ko'paytmasini toping.

Yechish: Bu masalani yechishda avval ichki va tashqi aylana chizish shartlarini qo'llab to'rtburchak tomonlari qanday ekanligini bilishimiz kerak.



1-Xossa: Agar to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari yig'indisi teng bo'lsa ,bunday to'rtburchakka ichki aylana chizish mumkin.Ya'ni: $BC + AD = AB + DC$

2-Xossa: bunday to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin.Ya'ni:

$$\angle B + \angle D = \angle A + \angle C = 180°$$

Endi masalaga qaytadigan bo'lsak :1-Xossaga ko'ra uning tomonlarini $AB = 3, BC = 2, AD = 5 , CD = 4$ ekanligini payqash qiyin emas.Bizda masala shartida diagonallar ko'paytmasini topish so'ralyapti AC·BD =?

Bu masalani yechish uchun biz ptolomey teoremasini qo'llaymiz.

Teorema(Ptolomey) Ixtiyoriy qavariq to'rtburchakka tashqi aylana chizilgan bo'lsa, u holda uning diagonallarining ko'paytmasi qarama-qarshi tomonlari ko'paytmasiga teng

Teoremaga ko'ra biz AB·DC+BC·AD=AC·BD Tenglikni yozamiz. Berilgan

qiymatlarni tenglikka quyib AC·BD=3·4+2·5=22 Sonini hosil qilamiz.Bu topilgan qiymat bizdan so'ralgan diagonallar ko'paytmasining o'zginasi.

Javob: Berilgan to'rburchakning diagonallar ko'paytmasi 22 ga teng.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Norjigitov H. Nuraliyev A. Matematikadan olimpiada masalalari.-Toshkent"Innavatsion rivojlanish nashriyoti-matbaa uyi"2020.244 b

2. Usarov, S. (2020). MAKTABDA MATEMATIKA FANI DARSLARINI LOYIHALASHTIRISH. Журнал математики и информатики, 1(1).

3.Raxmatov, A., Raxmonkulov , F. ., & O'sarov , S. . (2020). ZAMONAVIY ELEKTRON O'QUV MATERIALLARI TAYYORLASHDA ADOBE CAPTIVATE DASTURIDAN FOYDALANISH. Архив Научных Публикаций JSPI, 2(1).

4.Rakhmonkulov, F. (2020). TA'LIM SAMARADORLIGINI OSHIRISHDA VIRTUAL MUHITNI SHAKLLANTIRISH. Архив Научных Публикаций JSPI, 1(4).